라플라스변환

기계시스템디자인공학과

SEOULTECH

MECHANICAL SYSTEM DESIGN ENGINEERING

라플라스 변환(Laplace Transform)

- 의의: 미분방정식 → 대수방정식

- 정의 :

  f(t) → F(s)

  $$F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

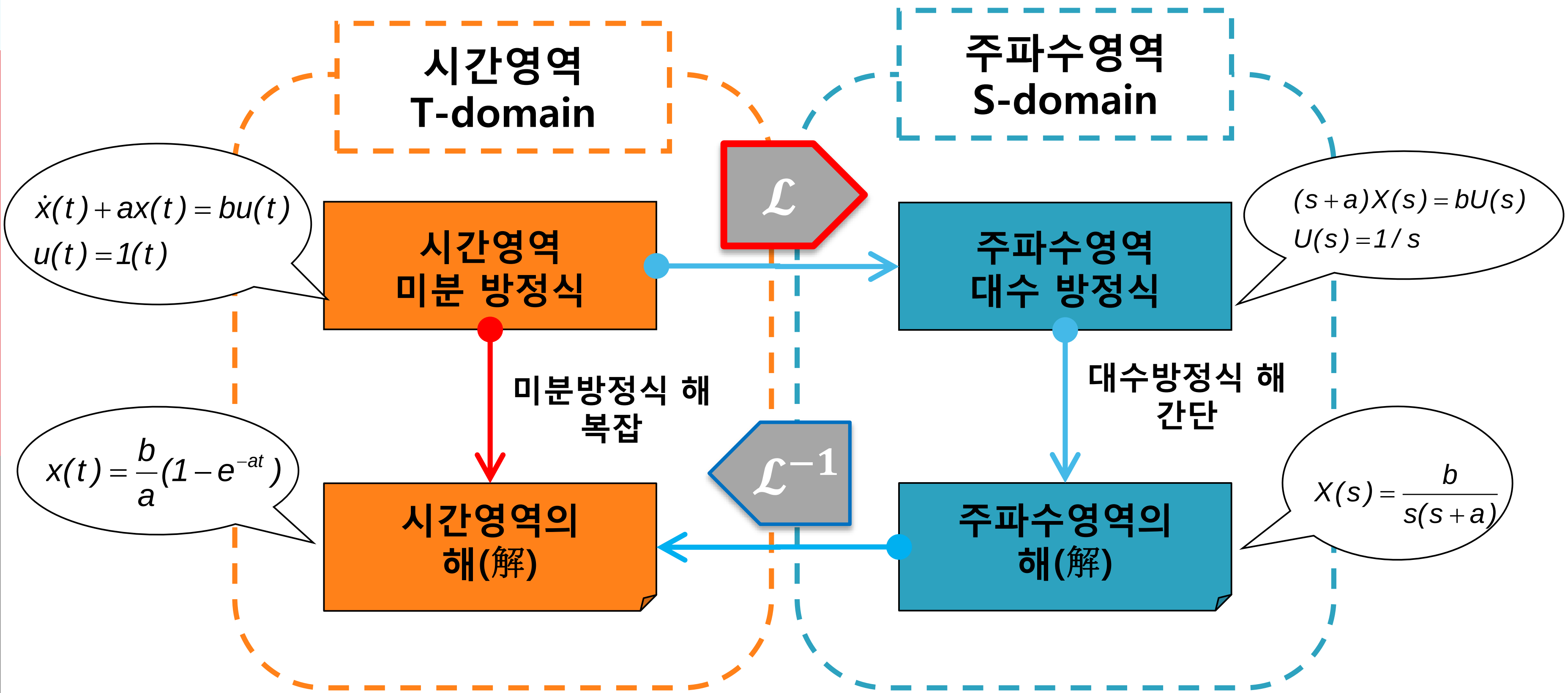
  여기서, s는 복소변수

  그리고 f(t) = 0, for t<0

- 라프라스 연산자의 선형성

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)]$$
$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$$

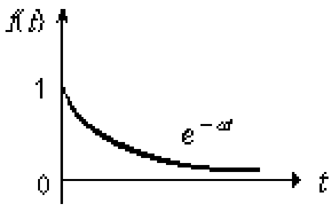
라플라스 변환의 의미



시간영역
T-domain
주파수영역
S-domain
$\dot{x}(t)+ax(t)=bu(t)$
$u(t)=1(t)$
시간영역
미분 방정식
$\mathcal{L}$
주파수영역
대수 방정식
$(s+a)X(s)=bU(s)$
$U(s)=1/s$
미분방정식 해
복잡
대수방정식 해
간단
$x(t)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})$
시간영역의
해(解)
$\mathcal{L}^{-1}$
주파수영역의
해(解)
$X(s)=\frac{b}{s(s+a)}$

라플라스 변환 예제

- 지수함수 (Exponential): $f(t) = e^{-at}$
  - 유도 :

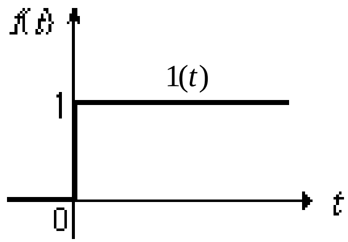


$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$= -\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \Big|_0^{\infty} = 0 - -\frac{1}{(s+a)} = \frac{1}{(s+a)}$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

- 단위계단파 함수 (Unit Step): $f(t) = 1(t)$
  - 유도 :



$$F(s) = \int_{0-}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = 0 - -\frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

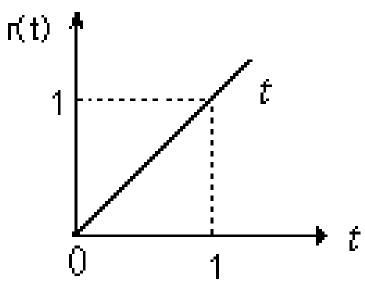
$$(e^{at})' = ae^{at}$$

$$\int e^{at}\, dt = \frac{e^{at}}{a}$$

라플라스 변환 예제

- 램프함수(Ramp): $f(t)=t$

곱의 미분



$$F(s)=\int_{0-}^{\infty} te^{-st}dt=\int_{0-}^{\infty}\left(t\frac{e^{-st}}{-s}\right)'dt-\int_{0-}^{\infty}\frac{e^{-st}}{-s}dt$$

$$=t\frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_{0}^{\infty}-\int_{0-}^{\infty}\frac{e^{-st}}{-s}dt=\frac{1}{s}\int_{0-}^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s^2}$$

참고

- 참고
  - **곱의 미분공식** 이용 $\quad (f(t)g(t))'=f(t)'g(t)+f(t)g(t)'$

    이항하면 $\quad f(t)g(t)'=(f(t)g(t))'-f(t)'g(t)$

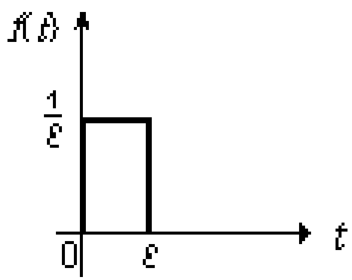
  - 여기서 $\quad f(t)=t,\quad g(t)'=e^{-st}$

※ L'Hôpital의 정리

$$\lim_{t\to\infty} te^{-st}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{se^{st}}=0$$

라플라스 변환 예제

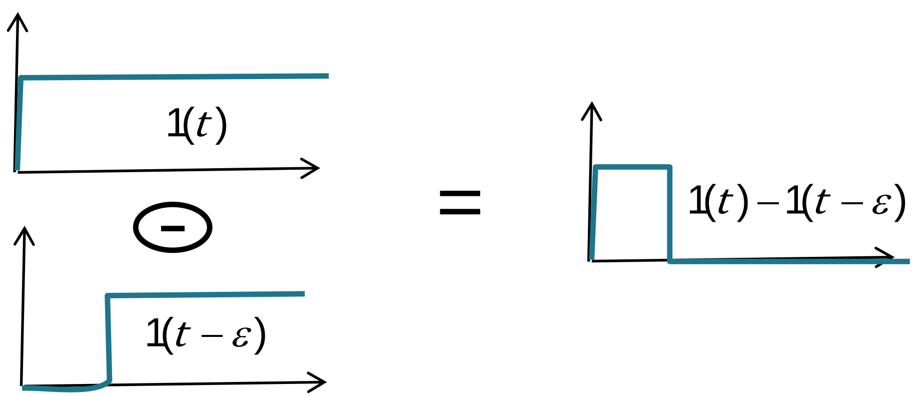
- 단위 임펄스 함수(Unit Impulse):

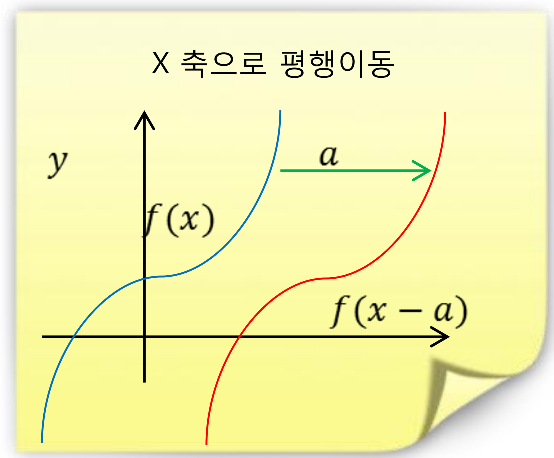


$$f(t)=\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

단, $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

- 참고





$$\therefore \delta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{1(t)-1(t-\varepsilon)\}$$

라플라스 변환 예제

- 단위 임펄스 함수 라플라스변환

$$F(s) = L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0-}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{0-}^{\infty} \{1(t) - 1(t-\varepsilon)\} \cdot e^{-st} dt$$

단위계단파

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \int_{0-}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt - \int_{\varepsilon}^{\infty} 1(t) \cdot e^{-st} dt$$

적분구간에서 함수가 0인 부분은 적분해도 0이므로....

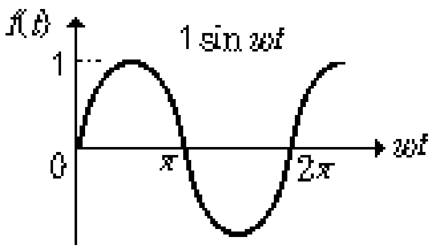
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{\varepsilon}^{\infty} \right)$$

노피탈의 정리

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{s} + 0 - \frac{e^{-s\varepsilon}}{s} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\varepsilon}}{\varepsilon s} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1$$

라플라스 변환 예제

- 정현파 함수(Sine function)



$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$F(s) = L[\sin \omega t] = \int_{0-}^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_{0-}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

오일러의 공식

⌘ **오일러(Euler)의 공식**

$$j^2 = -1$$

$$e^{\theta j} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{\theta j} + e^{-\theta j}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{\theta j} - e^{-\theta j}}{2j}$$

참고

- 여현파 함수(Cosine function) $f(t) = cos(\omega t)$

$$F(s) = L[cos\,\omega t] = \int_{0-}^{\infty} cos\,\omega t \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_{0-}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

오일러의 공식

⌘ 복소수 계산 (공액 복소수)

$$\frac{1}{a - jb} + \frac{1}{a + jb}$$

$$= \frac{a + jb}{(a - jb)(a + jb)} + \frac{(a - jb)}{(a - jb)(a + jb)}$$

$$= \frac{2a}{a^2 + b^2}$$

MECHANICAL SYSTEM DESIGN ENGINEERING

주요함수의 변환공식

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^m	$m!/s^{m+1}$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$
te^{-at}	$1/(s+a)^2$

Laplace 변환의 주요 공식

- 정의 $F(s)=\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
- s 영역에서 이동 $L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$
- t 영역에서 이동 $L[f(t-T)]=e^{-sT}F(s)$
- 미분 공식 $L[\frac{df}{dt}]=sF(s)-f(0-)$

  $L[\frac{d^2f}{dt^2}]=sL[\frac{df}{dt}]-\dot{f}(0-)$
- 정적분 공식 $L[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau]=\frac{F(s)}{s}$
- 최종값의 정리 $f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$
- 초기값의 정리 $f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$

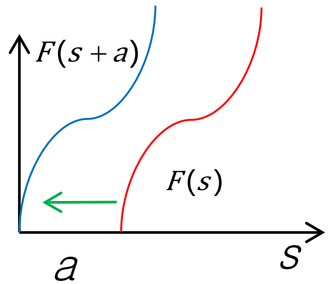
S영역과 t 영역에서의 이동

- 공식 $\boxed{L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)}$ ◁ s 영역 이동

- 유도 : $L[e^{-at}f(t)] = \int_{0-}^{\infty} e^{-at}f(t)e^{-st}dt = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}dt$

$$= \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-Rt}dt = F(R) = F(s+a)$$

s 축으로 –a 만큼 평행이동



- 공식 $\boxed{L[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)}$ ◁ t 영역 이동

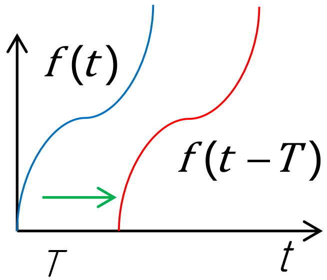
- 유도 : $L[f(t-T)] = \int_{0}^{\infty} f(t-T)e^{-st}dt = \int_{T}^{\infty} f(t-T)e^{-st}dt$

$$= \int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau = e^{-sT}\int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= e^{-sT}F(s)$$

$\tau \overset{\Delta}{=} t-T$
$dt = d\tau$

t 축으로 T 만큼 평행이동



미분, 적분의 라플라스변환

- 공식

$$\boxed{L[\frac{df}{dt}] = sF(s) - f(0-)}$$

- 유도 :

$$L[\frac{df}{dt}] = \int_{0-}^{\infty} f'(t)e^{-st}dt$$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0-}^{\infty}(-s)f(t)e^{-st}dt$$

$$= -f(0) + s\int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

곱의 미분공식 이용

$$f(t)'g(t) = \left(f(t)g(t)\right)' - f(t)g(t)'$$

$$g(t) \to e^{-st}$$

- 참고

$$L[\frac{d^2f}{dt^2}] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

- 공식

$$\boxed{L[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}}$$

- 유도 :

$$g(t) = \int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau, \;\; g'(t) = f(t)$$

$$F(s) = L[g'(t)] = sL[g(t)] - g(0-)$$

미분공식 이용

최종값 및 초기값의 정리

- 공식 $$f(\infty)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$
- 유도 :

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \left[\frac{df}{dt}\right] e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0)\right]$$

미분공식 이용

한편,

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \left[\frac{df}{dt}\right] e^{-st}dt = \int_0^\infty \left[\frac{df}{dt}\right] dt$$

$$= f(t)\Big|_0^\infty = f(\infty)-f(0)$$

- 공식 $$f(0)=\lim_{s\to \infty} sF(s)$$
- 유도 :

$$\lim_{s\to \infty}\int_0^\infty \left[\frac{df}{dt}\right] e^{-st}dt = \lim_{s\to \infty}\left[sF(s)-f(0)\right]$$

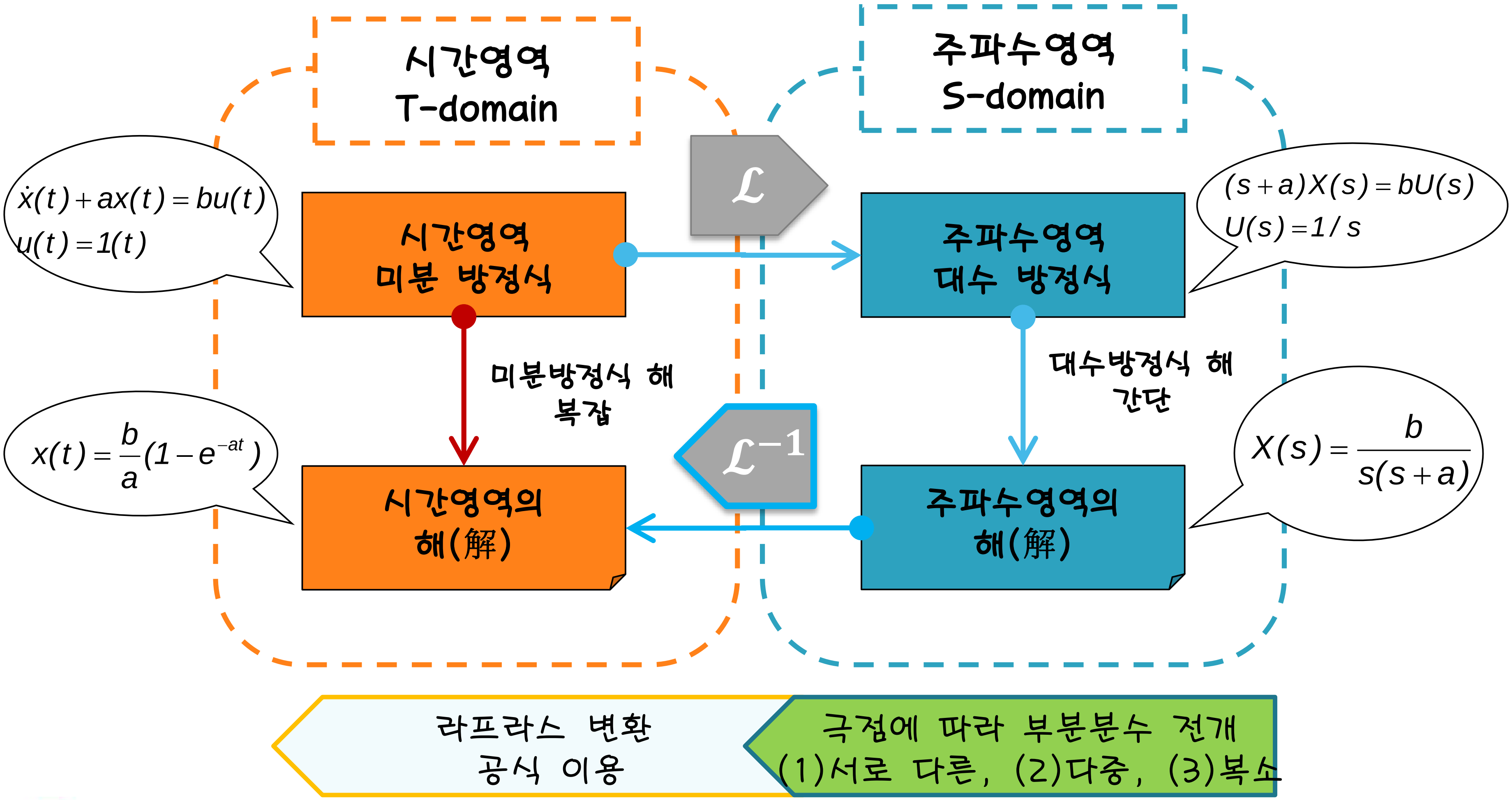
라플라스 역변환

기계시스템디자인공학과

SEOULTECH

MECHANICAL SYSTEM DESIGN ENGINEERING

라플라스 역변환의 의미



시간영역
T-domain
주파수영역
S-domain
$\dot{x}(t)+ax(t)=bu(t)$
$u(t)=1(t)$
시간영역
미분 방정식
$\mathcal{L}$
주파수영역
대수 방정식
$(s+a)X(s)=bU(s)$
$U(s)=1/s$
미분방정식 해
복잡
대수방정식 해
간단
$x(t)=\frac{b}{a}(1-e^{-at})$
시간영역의
해(解)
$\mathcal{L}^{-1}$
주파수영역의
해(解)
$X(s)=\frac{b}{s(s+a)}$
라프라스 변환
공식 이용
극점에 따라 부분분수 전개
(1)서로 다른, (2)다중, (3)복소

라플라스 역변환 -서로 다른 극점

- 라프라스 변환 → 대수방정식 → 대수방정식의 해
  - 이 해 F(s) 의 분모 다항식 A(s)의 해 (즉 A(s)=0인 s 값) 를 극점(Pole)이라 한다. $F(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$
  - 극점은 다음 3가지 경우 중에 하나가 된다.
  - (1) 서로 다른 극점, (2) 다중 극점, (3) 복소 극점
  - 단, 방정식 B(s)=0의 해는 영점(zero)라 한다.
- 부분분수 전개: 서로 다른 극(pole)을 가질 때

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$=\frac{a_1}{s+p_1}+\frac{a_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{a_n}{s+p_n}$$

여기서 a_k 를 다음과 같이 구할 수 있다..

$$a_k=\left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_k}$$

라플라스 역변환 – 다중 극점

- 부분분수 전개: 다중 극(Multiple pole)을 가질 때

적어도 하나의 다중 극이란 뜻임.

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

$$=\frac{a_1}{(s+1)}+\frac{a_2}{(s+1)^2}+\frac{a_3}{(s+1)^3}$$

$(s+1)^3$까지의 모든 차수로 가정

이제 a_i 만 구하면 된다. 양변에 $(s+1)^3$ 을 곱하면

$$(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}=a_3+a_2(s+1)+a_1(s+1)^2$$

양변에 s=-1을 대입하면 a_3 는 아주 간단하게 구할 수 있다.

$$a_3=\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1}=2$$

라플라스 역변환 – 다중 극점

- a_2 는 양변을 s에 대하여 한번 미분하면 구할 수 있다.

$$\frac{d}{ds}\left[(s+1)^3\frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-1} = a_2 + 2a_1(s+1)\Big|_{s=-1}$$

$$좌변 = (2s+2)\big|_{s=-1} = 0$$

$$a_2 = 0$$

a_1 은 또 한번 더 미분 하면 구할 수 있다. $2 = 2a_1$

$$\therefore F(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$f(t) = e^{-t}(1+t^2)$$

라플라스 역변환 – 복소 극점

- 부분분수 전개: 복소극점(Complex pole)을 가질 때

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{3}{s^2+2s+3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(s+1)^2+2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}$$

- 완전 제곱꼴로 변형 후 sine 공식이용

$$f(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin\sqrt{2}t$$

참고: 2차식에서 복소근인지 실근인지를 빠르게 구별하는 방법

1) 완전제곱꼴로 바꾸고도 남는항이 양수 → 복소근

2) 완전제곱꼴로 바꾸고도 남는항이 음수 → 실근

$$s^2+4s+13 = s^2+4s+4+9 = (s+2)^2+9 = 0$$

$$(s+2)^2 = -9 \;\rightarrow\; s+2 = \mp\sqrt{-9} \;\rightarrow\; s = -2 \mp 3j$$

부분분수 연습

- 서로 다른 실근

$$G(s)=\frac{3}{(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}$$

▶ $$\left.\frac{3(\cancel{s+2})}{(\cancel{s+2})(s+3)}\right|_{s=-2}=\left[\frac{k_1}{\cancel{s+2}}(\cancel{s+2})+\frac{k_2}{s+3}(s+2)\right]_{s=-2}$$

$$k_1=3$$

▶ $$\left.\frac{3(\cancel{s+3})}{(s+2)(\cancel{s+3})}\right|_{s=-3}=\left[\frac{k_1}{s+2}(s+3)+\frac{k_2}{\cancel{s+3}}(\cancel{s+3})\right]_{s=-3}$$

$$k_2=-3$$

- 중근을 가질 경우

$$G(s)=\frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{k_1}{s+1}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{(s+2)^2}$$

▶ $$\left.\frac{2}{(s+2)^2}\right|_{s=-1}=\left[k_1+\frac{k_2}{s+2}(s+1)+\frac{k_3}{(s+2)^2}(s+1)\right]_{s=-1}$$

$$k_1=2$$

▶ $$\left.\frac{2}{(s+1)}\right|_{s=-2}=\left.\frac{k_1}{s+1}(s+2)^2+\frac{k_2}{\cancel{s+2}}\cancel{(s+2)^2}+k_3\right|_{s=-2}$$

$$k_3=-2$$

▶ $$\left.\left\{\frac{2}{(s+1)}\right\}'\right|_{s=-2}=\left.\left\{\frac{k_1}{s+1}(s+2)^2+k_2(s+2)+k_3\right\}'\right|_{s=-2}$$

$$k_2=\left.\frac{-2}{(s+1)^2}\right|_{s=-2}=-2$$

부분분수 연습

- 복소근

$$G(s)=\frac{5}{s(s^2+4s+5)}$$

$$=\frac{k_1}{s}-\frac{\boxed{k_2s+k_3}}{s^2+4s+5}$$

분모가 2차면 1차식으로.

❖ 계수 구하기

$$=\frac{k_1}{s}-\frac{k_2s+k_3}{s^2+4s+5}$$

$$k_1=1$$

$$=\frac{s^2+4s+5-(k_2s^2+k_3s)}{s(s^2+4s+5)}$$

$$k_2=1,\quad k_3=4$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+4}{s^2+4s+5}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+4}{s^2+4s+4+1}$$

분모에서 완전제곱꼴

$$=\frac{1}{s}-\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+1}$$

분자를 S+2로 분해

$$=\frac{1}{s}-\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1}-\frac{2}{(s+2)^2+1}$$

$$\therefore g(t)=1-e^{-2t}\{\cos(t)+2\sin(t)\}$$

부분분수 연습

- 중근과 복소근이 모두 포함되었다면

$$G(s)=\frac{5}{s^2(s^2+4s+5)}$$

$$=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s^2}+\frac{k_3s+k_4}{s^2+4s+5}$$

❖ k_2는 양변에 s^2 을 곱하여 구한다.

$$\left.\frac{5}{(s^2+4s+5)}\right|_{s=0}=k_2=1$$

❖ k_1 은 양변에 s^2 을 곱한 후 미분

$$\left.\left[\frac{5}{(s^2+4s+5)}\right]'\right|_{s=0}=\left[\frac{-5(2s+4)}{(s^2+4s+5)^2}\right]_{s=0}=k_2=-4/5$$

❖ k_3, k_4나머지는 통분하여 계수비교를 한다.

제어공학연습문제

라플라스 변환/역변환

SEOULTECH

MECHANICAL SYSTEM DESIGN ENGINEERING

A. 다음 함수를 라플라스 변환하라.

1) $f(t) = 3t^2$

2) $f(t) = 5e^{at}$

3) $f(t) = 8e^{-4t}\cos 3t$

4) $f(t) = (1 + 2t + 3t^2)e^{-4t}$

5) $f(t) = t1(t - T)$

6) $f(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}$

7) $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$

참고: $\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$

$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$

B. 다음 함수를 라플라스 역변환하라.

1) $F(s)=\dfrac{2}{(s+4)}$

2) $F(s)=\dfrac{2}{s^2+16}$

3) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+1}$

4) $F(s)=\dfrac{5}{(s+2)^2}$

5) $F(s)=\dfrac{13}{s^2+10s+26}$

6) $F(s)=\dfrac{s^2+3s+3}{s^2+3s+2}$

C. 다음 함수를 Laplas 역변환하라.

1) $F(s)=\dfrac{20(s^2+1)}{s(s+1)(s+2)(s+10)}$

2) $F(s)=\dfrac{5s+39}{s(s^2+6s+39)}$

3) $F(s)=\dfrac{s^2+1}{(s-1)(s+1)^2}$

MECHANICAL SYSTEM DESIGN ENGINEERING

D. 다음 함수를 라플라스 역변환하라.

1) $$F(s) = \frac{16}{s(s^2 + 9s + 8)}$$

2) $$F(s) = \frac{8}{(s+1)(s^2 + 4s + 8)}$$

3) $$F(s) = \frac{s+4}{s(s^2 + 3s + 9)}$$

SEOULTECH

E. 다음 함수를 라플라스 역변환하라.

1) $$F(s)=\frac{16}{s^2+5s+4}$$

2) $$F(s)=\frac{8}{(s+1)(s^2+4s+7)}$$

3) $$F(s)=\frac{s+4}{s(s^2+6s+9)}$$

MECHANICAL SYSTEM DESIGN ENGINEERING

F. 다음 함수를 라플라스 역변환하라.

1) $$F(s)=\frac{6s+3}{s^2}$$

2) $$F(s)=\frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$$

3) $$F(s)=\frac{3(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$$

SEOULTECH

G. 다음 함수를 라플라스 역변환하라.

1) $$F(s) = \frac{2s^2 + 4s + 5}{s(s+1)}$$

2) $$F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$$

3) $$F(s) = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}$$